2. Ακολουθίες-Σύγκλιση-Συνεχείς Συναρτήσεις

Έστω δύο μετρικοί χώροι (X, d_1) και (Y, d_2). Λέμε ότι μία μετρική d του συνόλου $X \times Y$ είναι **μετρική γινόμενο**, αν για κάθε ακολουθία $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $X\times Y$ και $(x, y) \in X\times Y$ ισχύει ότι $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x, y)$ αν και μόνο αν $x_n \xrightarrow{d_1} x$ και $y_n \xrightarrow{d_2} y$.

Άσκηση 1

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και θεωρούμε τον μετρικό χώρο $(X \times X, d)$, όπου η d είναι μία μετρική γινόμενο. Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση $\rho : (X \times X, d) \to \mathbb{R}$ με $(x, y) \mapsto \rho(x, y)$ είναι συνεχής.

Άσκηση 2

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και έστω η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X. Να χαρακτηρίσετε ως αληθή ή ψευδή των παρακάτω ισχυρισμό: Αν για κάποιο $x \in X$ και κάθε συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(x_n) \to f(x)$, τότε $x_n \to x$.

Άσκηση 3

Έστω μετρικοί χώροι (X_i, d_i), $i = 1, 2, \ldots k$. Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση με τύπο

$$d_\infty(x, y) := \max\{d_i(x(i), y(i)) : i = 1, 2, \ldots , k\},$$

όπου $x = (x(1), \ldots , x(k))$ και $y = (y(1), \ldots , y(k)) \in X$, είναι μία μετρική του $X := \prod_{i=1}^{k} X_i$ και στη συνέχεια δείξτε ότι πρόκειται για μία μετρική γινόμενο του X.

Άσκηση 4

Έστω ο ευκλείδειος χώρος $(\mathbb{R}^k, d_2)$, όπου d_2 η συνήθης μετική αυτού και έστω η (διανυσματική) ακολουθία $(\vec{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $\mathbb{R}^k$. Να αποδείξετε ότι $\operatorname{diam}(\{\vec{x_n} : n \in \mathbb{N}\}) < +\infty$ αν και μόνο αν $\exists\, M > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ έτσι, ώστε $\|\vec{x_n}\|_2 \le M$ (δηλαδή, η ακολουθία είναι φραγμένη).

Άσκηση 5

Ας είναι ένας μετρικός χώρος (X, d), ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X και $x \in X$. Αν $\lim_n x_n = x \in X$, να αποδείξετε ότι $\lim_n y_n = x$ αν και μόνο αν $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$.

Άσκηση 6

Ας είναι ένας μετρικός χώρος (X, d), ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X και $x \in X$ έτσι, ώστε $x_n \to x$. Να αποδείξετε ότι για κάθε μετάθεση $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (δηλαδή, 1-1 και επί) η ακολουθία $y_n := x_{\pi(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει επίσης προς το x.

Άσκηση 7

(i) Να αποδείξετε ότι κάθε συνάρτηση $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (Y, d_0)$, όπου d_0 η διακριτή μετρική, είναι συνεχής αν και μόνο αν f σταθερή.

(ii) Να αποδείξετε ότι σε τυχαίο διακριτό μετρικό χώρο οι συγκλινουσες ακολουθίες ταυτίζονται με τις τελικά σταθερές ακολουθίες.

(iii) Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ στον $\mathbb{R}^2$. Εξετάστε αν η εν λόγω ακολουθία συγκίνει στους $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ και $(\mathbb{R}^2, d_0)$, όπου d_0 η διακριτή μετρική και d_∞ η μετρική άπειρο.

Άσκηση 8

(i) Αποκλειστικά και μόνο με τη χρήση του ορισμού να αποδείξετε ότι κάθε συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x}, \; x \in (0,1)$$

δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & , \quad x \neq -1 \\ 1 & , \quad x = -1 \end{cases},$$

δεν είναι συνεχής.

(iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση ακεραίου μέρους ενός πραγματικού αριθμού $f(x) = [x]$, για $x \in \mathbb{R}$, είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ και μη συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{Z}$.

Άσκηση 9

Έστω ο μετρικός χώρος (X, d) και μία συγκλίνουσα ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X. Τότε, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη στον X (δηλαδή, $\mathrm{diam}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$).

Υποδείξεις Ασκήσεων

Άσκηση 1

Εφαρμόστε την Αρχή της Μεταφοράς και έπειτα από τη γνωστή ιδιότητα

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y), \; \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

έπεται το ζητούμενο.

Άσκηση 2

Έστω η συνάρτηση $g\colon X \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(y) = d(y, x), \; y \in X$. Από την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα η g είναι συνεχής (μάλιστα ομοιόμορφα συνεχής). Από την υπόθεση έχουμε ότι $g(x_n) \to g(x)$ ή $d(x_n, x) \to d(x, x) = 0$. Συνεπώς έχουμε ότι $x_n \to x$ και άρα ο ισχυρισμός είναι αληθής.

Άσκηση 3

Έυκολα μπορεί να αποδείξει κανείς ότι οι d_∞ είναι μετρική του X, αποδεικνύοντας μία προς μία τις ιδιότητες 1,2 και 3 που πρέπει να έχει μια μετρική. Για να αποδείξουμε ότι η d_∞ είναι μετρική γινόμενο αρκεί να θεωρήσουμε νια τυχούσα ακολουθία $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X και ένα τυχόν $x \in X$ και να δείξουμε την εξής ισοδυναμία:

$$\lim_m d_\infty(x_m, x) = 0 \iff \lim_m d_i(x_m(i), x(i)) = 0, \forall\, i = 1, 2, \ldots k.$$

Το αναγκαίο είναι προφανές. Όσο για το ικανό αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για κάθε $i = 1, 2, \ldots k$ ισχύει $d_i(x_m(i), x(i)) \leq d_\infty(x_m, x)$.

Άσκηση 4

Ουσιαστικά θέλουμε να δείξουμε ότι ο ορισμός τηε φραγμένης ακολουθίας όπως τον ορίσαμε με την βοήθεια της διαμέτρου στο μάθημα της Τοπολογίας, συμπίπτει με τον ορισμό της φραγμένης ακολουθίας όπως τον έχουμε ορίσει στο μάθημα της Διανυσματικής Ανάλυσης (δηλαδή, μέσω των νορμών). Γράφουμε αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε ισοδύναμα ως

$$\exists\, K > 0, \forall\, n, m \in \mathbb{N}: \ d_2(x_n, x_m) \coloneqq \|x_n - x_m\|_2 \leq K \iff \exists\, M > 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}: \ \|\vec{x_n}\|_2 \leq M.$$

Όποτε, εύκολα τώρα μπορούμε να δείξουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 5

Η ικανή κατεύθυνση είναι προφανής. Για την αναγκαια κατεύθυνση αρκεί κανείς να παρατηρήσει ότι $d(y_n, x) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x), \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 6

Έστω π μετάθεση του $\mathbb{N}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $x_n \to x$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$, για κάθε $k > k_0$ ισχύει $d(x_k, x) < \varepsilon \ \ (\star)$. Θεωρούμε το σύνολο $A(k_0) \coloneqq \{\pi^{-1}(1), \ldots, \pi^{-1}(k_0)\}$. Αφού η π είναι 1-1 και επί, το $A(k_0)$ έχει ακριβώς k_0 στοιχεία. Θέτοντας $n_0 = \max A(k_0)$, αν $n > n_0$ έχουμε $n \neq \pi^{-1}(j), \ \forall\, j = 1, 2, \ldots, k_0$. Δηλαδή, $\pi(n) \neq j, \ \forall\, j = 1, 2, \ldots, k_0$. Επομένως, $\pi(n) > k_0$ και άρα από τη σχέση $(\star)$, προκύπτει το ζητούμενο.

Άσκηση 7

(i) Αρχικά κάθε σταθερή συνάρτηση είναι συνεχής. Για την αντίθετη κατεύθυνση αρκεί κανείς να αναλογιστεί τον ορισμό της συνέχειας και να τον εφαρμόσει για $\varepsilon = 1$.

(ii) Γενικά, κάθε τελικά σταθερή είναι προφανώς συγκλινουσα. Από την άλλη μεριά, αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα προς κάποιο $x \in X$, τότε εφαρμόζοντας τον ορισμό της σύγκλισης μίας ακολουθίας για $0 < \varepsilon < 1$, συνάγουμε ότι η εν λόγω ακολουθία είναι τελικά σταθερή.

(iii) Από την Άσκηση 3 η d_∞ είναι μία μετρική γινόμενο και αφού $1 + \dfrac{1}{n} \to 1$ και $\dfrac{1}{n} \to 0$, αυτό σημαίνει ότι $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow{d_\infty} (1, 0)$. Εντούτοις, η παραπάνω ακολουθία δεν συγκλίνει στον $(\mathbb{R}^k, d_0)$, επειδή εν συνέκλινε από το (ii) θα ήταν τελικά σταθερή πράγμα άτοπο.

Άσκηση 8

(i) Για $\varepsilon = 1$ και τυχαίο $\delta > 0$ επιλέγοντας $x \in (0, 1)$ και $y = \frac{x}{2} \in (0, 1)$ έχουμε $|x - y| = \frac{x}{2} < \delta$, αλλά $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{1}{x} > 1$.

(ii) Για $x_n = -1 + \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $x_n \to -1$ και $f(x_n) = -2 + \dfrac{1}{n} \to -2 \neq f(-1) = 1$.

(iii) Η απάντηση και πάλι θα δοθεί με χρήση της Αρχής της Μεταφοράς. Έστω $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $m < x_0 < m + 1$. Έτσι, $f(x_0) = m$. Ας είναι τώρα μία τυχούσα ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ τέτοια, ώστε $x_n \to x_0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m < x_n < m + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Οπότε, $f(x_n) = m$, $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $f(x_n) \to m = f(x_0)$, και αυτό αποδεικνύει τη συνέχεια της f. Από την άλλη μεριά αν $x_0 \in \mathbb{Z}$ η ακολουθία $x_n = x_0 - \dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι τέτοια ώστε $x_n \to x_0$ και $f(x_n) \to x_0 - 1 \neq x_0 = f(x_0)$, και αυτό αποδεικνύει την ασυνέχεια της f στους ακεραίους.

Άσκηση 9

Η ιδέα είναι να ¨κλείσουμε' την $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μέσα σε μία ανοιχτή μπάλα του X. Από την υπόθεση $x_n \to x \in X$ προκύπτει ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq n_0$ να ισχύει $d(x_n, x) < 1$ (Άρα, ¨κλείσαμε' την ουρά της ακολουθίας μέσα σε μία (ανοιχτή) μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα 1). Για τους πεπερασμένους όρους της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, θέτοντας $M := \max\{d(x_1, x), \ldots, d(x_{n_0-1}, x), 1\} + 1$, συνάγουμε ότι $x_n \in B_d(x, M)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα, η εν λόγω ακολουθία είναι φραγμένη στον X.